2-ЛЕКЦИЯ. Кейбір бірінші ретті интегралданатын теңдеулер

Лекция мақсаты: Айнымалылары ажыратылатын**,** бБіртекті сызықты теңдеулер мен біртексіз сызықты теңдеулерді интегралдау әдісімен таныстыру. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау.

Негізгі сөздер: Айнымалыларды ажырату, біртектілік, біртексіздік, Эйлер әдісі, вариациялау, интегралдық көбейткіш.

Қысқаша мазмұны

Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер

2.1. Берілген теңдеудің шешімін сол теңдеуге кіретін функциялар және олардың интегралы түрінде өрнектеуді теңдеуді квадратура арқылы интегралдау деп атайды. Бұл параграфта кейбір оңай интегралданатын теңдеулердің түрлерін келтірейік.

1^0. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға тәуелсіз:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

Мұнда *f(x)* функциясы берілген, $<a,b>$ аралығында үздіксіз деп есептелінеді. Бұл теңдеудің жалпы шешімін табу үшін одан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$y = \int f(x)dx + C \tag{2}$$

Бұл өрнек Коши түрінде былай жазылады:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0 \tag{3}$$

Мұнда x_0 – берілген сан деп, y_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

2^0. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға ғана тәуелді:

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{4}$$

Мұнда f(y) функциясы кейбір $<c,d>$ аралығында үздіксіз деп есептелінеді және осы аралықта нөлге айналмасын. Онда бұл теңдеуді аударып жазуға болады:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \tag{5}$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін оның екі жағын *dy*-ке көбейтіп, анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C \tag{6}$$

немесе Коши түрінде:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} + x_0 \tag{7}$$

Мұнда y_0 – тұрақты сан деп, ал x_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

3^0. Жоғарыда келтірілген теңдеулер айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына жатады. Мұндай теңдеулердің жалпы түрі былай жазылады:

$$f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0 \tag{8}$$

Осы теңдеуде $f_2(y)$ және $f_3(x)$ функциялары берілген облыста нөлге тең болмаса, онда теңдеудің екі жағын $f_2(y)\cdot f_3(x)$ көбейтіндісіне бөлсек, мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \tag{9}$$

Бұл келтіру айнымалыларды ажырату тәсілі деп аталады. Жалпы, айнымалыларды ажырату деп *dx*-тың алдында тек *x*-қа тәуелді, ал *dy*-тың алдында тек *y*-ке тәуелді функциялардың тұруын қамтамасыз етуді айтады.

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін екі жағынан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C \qquad (10)$$

немесе Коши түрінде:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \qquad (11)$$

4^0. Айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына басқа да теңдеулерді жатқызуға болады. Олар кейбір алмастырулар арқылы оңай интегралданады. Солардың бірі:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by) \qquad (12)$$

түріндегі теңдеулердің $z = ax + by$ алмастыруы арқылы айнымалылары оңай бөлінеді. Шынында да, соңғы алмастырудан туынды тауып, теңдеуге қоятын болсақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

немесе

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

Соңғы қатынастан:

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

яғни айнымалылар бөлінді. Осыдан интеграл алсақ, онда жалпы интегралды мына түрде жазуға болады:

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C \qquad (13)$$

Бірінші ретті сызықты теңдеулер

3.1. Белгісіз функция мен оның туындысы сызықты түрде, яғни бірінші дәрежеде байланысқан теңдеуді сызықты дифференциалдық теңдеу деп атайды. Сызықты теңдеудің келтірілген түрін қарастырайық:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Мұнда $p(x)$, $q(x)$ функциялары кейбір $<a,b>$ аралығында анықталған және үздіксіз деп есептелінеді. Егер $q(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеуді біртексіз сызықты теңдеу деп, ал $q(x)=0$ болса, онда біртекті сызықты теңдеу деп атайды:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

Көбінесе (2) теңдеуді (1) теңдеудің сәйкес біртектісі деп атайды.

Біртекті (2) теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Екі жағын y-ке бөліп, мынандай теңдеу аламыз:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$ln|y| + \int p(x)dx = lnC$$

өрнегін аламыз. Логарифмсіз жазсақ,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

түріндегі (2) теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Егер $y=0$ жағдайды қарастырсақ, ол осы жалпы шешімнің $C=0$ болғандағы мәніне сәйкес келетін шешім. Сондықтан $y=0$ – дербес шешім. Оны нөлдік немесе тривиал шешім деп те атайды және ол барлық уақытта бар шешім.

Біртекті (2) теңдеудің (3) жалпы шешімін Коши түрінде жазсақ, былай жазылады:

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} \qquad (4)$$

мұнда x_0 -тұрақты сан, ал y_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

Біртекті теңдеу шешімдерінің екі қасиетін атап өтейік:

1^0. Егер y_1 және y_2 функциялары (2) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың қосындысы: $y=y_1+y_2$ функциясы да сол теңдеудің шешімі болады.

2^0. Егер y_1 функциясы (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y = Cy_1$ функциясы да (C – кез келген сан) сол теңдеудің шешімі болады.

3.2. Енді берілген біртексіз (1) теңдеуге оралатын болсақ, оның жалпы шешімін табу үшін мынандай әдістерді қолдануға болады.

1^0. Тұрақты санды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі).

Біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімін біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімі – (3) түрде іздейміз, бірақ мұндағы C санын x-қа байланысты айнымалы функция деп есептейміз:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (5)$$

Осы функцияны (1) теңдеуге апарып қоялық:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Бұдан

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

теңдеуін аламыз. Енді осы теңдеуді интегралдасақ, онда

$$C(x) = C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (6)$$

өрнегін аламыз. Мұнда C_0 – кез келген тұрақты сан. Осы (6) өрнекті (5) қатынасқа апарып қойсақ, онда біртексіз (1) теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad (7)$$

Соңғы шешімді Коши түрінде жазсақ, онда мынандай өрнек аламыз:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right] \qquad (8)$$

мұнда x_0-тұрақты сан, ал y_0 – кез келген сан деп есептейміз.

2^0. Бернулли әдісі.

Біртексіз (1)теңдеудің шешімін $y=u(x)v(x)$ түрінде іздейміз. Сонда

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x) \qquad (9)$$

Мұндағы, $u(x)$ функциясын біртекті $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ теңдеудің шешімі $u = e^{-\int p(x)dx}$ түрінде алсақ, онда (9) қатынастан

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{dv}{dx} = q(x)$$

теңдеуін аламыз. Осыдан интегралдау арқылы

$$v = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (10)$$

болатынын көреміз. Мұнда C – тұрақты сан. Табылған $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының көбейтіндісі у(х) функциясын беретін болғандықтан,

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right],$$

яғни жалпы шешім (7) түрге келеміз.

3^0. Интегралдаушы көбейткіш әдісі (Эйлер әдісі).

Берілген біртексіз (1) теңдеудің екі жағын $e^{\int p(x)dx}$ функциясына көбейтіп, ықшамдап жазатын болсақ, онда мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

ал бұдан

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right].$$

Тағы да жалпы шешім – (7) түрге келдік.

Толық дифференциалды теңдеулер

4.1. Симметриялық түрде берілген

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

дифференциалдық теңдеудің сол жағы кейбір екі айнымалы $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалына тең болса, яғни

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) \tag{2}$$

онда (1) теңдеуді толық дифференциалды теңдеу деп атайды. Соңғы (2) теңдікті пайдалансақ, (1) теңдеуді былай жазуға болады:

$$du(x,y) = 0 \tag{3}$$

Бұдан

$$u(x,y) = C \tag{4}$$

өрнегі (1) теңдеудің жалпы интегралы болатынын көреміз. Сондықтан осы u функциясын табу жолын келтірейік.

Әдетте, берілген теңдеудің толық дифференциалдылығын бірден байқау мүмкін емес. Сондықтан ондай жағдайды анықтайтын белгіні келтірейік.

Айталық, (1) теңдеудегі $M(x,y)$ және $N(x,y)$ функциялары кейбір D облысында өзінің дербес туындылары $\frac{\partial M}{\partial y}$ және $\frac{\partial N}{\partial x}$ мен бірге үздіксіз функциялар болсын.

Теорема. Берілген (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болу үшін бір байланысты D облысында

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

тепе-теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық, (1) теңдеудің сол жағы кейбір $u(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болсын:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{6}$$

Бұл тепе-теңдіктен мына қатынастарды аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \tag{7}$$

Соңғы қатынастардың біріншісін y бойынша, екіншісін x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{8}$$

тепе-теңдіктері шығады. Шарт бойынша тепе-теңдіктердің оң жақтары үздіксіз. Ендеше, олардың сол жақтары да үздіксіз. Ал үздіксіз функцияның аралас дербес туындылары өзара тең болады да,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{9}$$

тепе-теңдігі алынады.

Жеткіліктілігі. Айталық, (5) шарт орындалсын. Алдымен (7) қатынастардың біріншісін қанағаттандыратын $u(x,y)$ функциясын іздейік. Сол бірінші қатынасты x бойынша интегралдасақ, мынандай функция аламыз:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)\,, \tag{10}$$

мұнда $\varphi(y)$ – тек у-ке байланысты кез келген функция және ол үздіксіз дифференциалданатын функция болсын.

Енді осы $\varphi(y)$ функциясын (7) қатынастардың екіншісі орындалатындай етіп алайық, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)\right)=N(x,y) \tag{11}$$

Бұл жерде мына теңдікті көрсете кетейік:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx=N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}=N(x,y)-N(x_0,y)$$

Сондықтан (11) қатынас былай жазылады:

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$$

немесе

$$\varphi'(y)=N(x_0,y) \tag{12}$$

Осыдан

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy \tag{13}$$

Осы табылған $\varphi(y)$ функциясын (10) өрнекке апарып қоятын болсақ,

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy \tag{14}$$

функциясын аламыз. Ал бұл функцияны кез келген C санына теңестірсек, онда берілген (1) теңдеудің жалпы интегралын аламыз:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=C \tag{15}$$

Егер $u(x,y)$ функциясын құруды (7) қатынастардың екіншісінен бастасақ, онда (1) теңдеудің жалпы интегралының түрі мынандай болады:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy=C \tag{16}$$

Мысал-1. $(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0$ теңдеуінің жалпы интегралын табу керек болсын.

Шешуі: $M(x,y)=2xy-1, N(x,y)=3y^2+x^2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x,\ \text{яғни}\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Бұл теңдеу толық дифференциалды теңдеу. (15) өрнекті пайдаланып жалпы интегралды іздейміз. Мұнда $x_0=0, y_0=0$ деп алайық. Сонда:

$$\int_{0}^{x}(2xy-1)dx+\int_{0}^{y}(3y^2+x_0^2)dy=C$$

немесе

$$x^2y-x+y^3=C$$